LYCEE PILOTE ELKEF — Devoir de synthèse №2 — Mathematiques — $4^{ème}sc_1$ — Mars 2008 — Durée : 3^h

Exercice 1 :(3 points) QCM

Pour chaque question, choisir la réponse exacte

1) Dans l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct on donne trois points non alignés A, B et C.

a) L'ensemble des M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ est :

A. Le plan perpendiculaire à la droite (AB) et passant par A.

B. La droite (AB).

C. {A,B}

b) L'ensemble des M de l'espace tels que $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0$ est :

A. Le plan (ABC).

B. La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

C. La droite (AB).

c) L'ensemble des M de l'espace tels que $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ est :

A. Le plan (ABC).

B. La droite passant par A et perpendiculaire au plan (ABC)

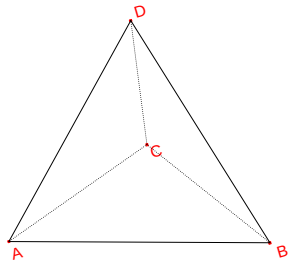
C. La droite (AB).

2) ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ =

A. a^2

B. $\frac{1}{2}a^2$

C. $-\frac{1}{2}a^2$



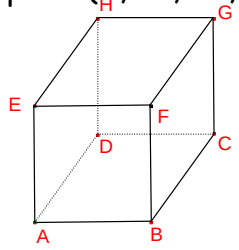
3) Soit ABCDEFGH un cube de d'arête 1. On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

Le plan (BCE) a pour équation :

A. x + y -1 = 0.

B. x + z -1 = 0.

C. y + z -1 = 0.



Exercice 2 :(5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .On donne le plan P :2y+z-6=0.

On considère les points A(3 ; 0 ; 6) et B(0 ; 0 ; 6), on appelle Δ la droite passant par A et B.

1) a- Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b- Soit Q le plan contenant la droite Δ et perpendiculaire à P.

Montrer qu'une équation de Q est : y – 2z + 12 = 0.

c- Montrer que $Q \cap P = \Delta$

2) On donne le point C(0,-1,3).

a- Calculer d(C,P) et d(C,Q).

b- En déduire $d(C,\Delta)$.

c- Calculer BC, en déduire que B est le projeté orthogonal de C sur la droite Δ.

3) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de C sur le plan P.

4) Donner une équation cartésienne du plan (CHB).

Exercice 3 :(7points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = -\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \in]0,1[\\ f(x) = \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$

On désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Vérifier que f est continue en 1.
   b- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) a- Etudier les variations de f.
   b- En déduire que f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
   c- Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0]$ $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
3) a- Montrer que la droite D : y = x est une asymptote à Γ.
   b- Préciser la position de Γ par rapport à D sur $[1,+\infty[$.
   c- On désigne par Γ' la courbe représentative de f^{-1}. Tracer Γ et Γ'.

Exercice 4 :(5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos(\dfrac{\pi}{2}x)$.

1) a- Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$
   b- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right[$ $(f^{-1})'(x) = -\dfrac{4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}$.
2) a- Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $|f'(x)| \le \dfrac{\pi}{4}$.
   b- Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $[0,1]$ une unique solution α.
   c- Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $|f(x) - \alpha| \le \dfrac{\pi}{4}|x-\alpha|$.
3) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = f(U_n)$.
   a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le U_n \le 1$
   b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{\pi}{4}|U_n - \alpha|$
   c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \le (\dfrac{\pi}{4})^n$.
   Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.